

Задачи к лекции "Peer effects или spillovers? Роль сетей в образовании, преступности, спорте и других сферах жизни"

Филипп Ущев

ВШЭ СПб

16.08.2021

Задача 1: уравнения равновесия

Докажите, что если равновесные (т.е. предсказываемые моделью) усилия всех трёх участников строго положительны, то они являются решением такой системы линейных уравнений:

$$x_A = \alpha_A + \gamma x_B + \gamma x_C$$

$$x_B = \alpha_B + \gamma x_A$$

$$x_C = \alpha_C + \gamma x_A$$

Подсказки:

(i) предельная выгода от дополнительной единицы усилий должна быть равна предельным затратам (ну а куда им деваться, если участники рациональны);

(ii) каждый участник рассматривает свою продуктивность как заданную (не может влиять на неё напрямую своими действиями)

Задача 2*: сравнительная статика по силе spillovers

"Сравнительная статика" – неудачный, но безнадежно прочно укоренившийся в экономике термин, означающий, по сути, анализ чувствительности равновесия в ответ на возмущение некоторого параметра

Собственно задача: доказать, что равновесные усилия всех участников тем выше, чем выше сила spillovers γ

Задача 3** : Алиса и код да Винчи

Положим $\alpha_A = \alpha_C = 1$. Доказать, что

- если spillovers не слишком сильны, а именно,

$$0 < \gamma < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 = \text{золотое сечение!}$$

то существует пороговая продуктивность Боба $\bar{\alpha}_B(\gamma) > 0$, такая, что при $\alpha_B > \bar{\alpha}_B(\gamma)$ равновесные усилия Боба выше, чем у Алисы;

- если spillovers достаточно сильны, а именно,

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 < \gamma < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707,$$

то усилия Боба ниже усилий Алисы, независимо от продуктивности Боба

Задача 4*: эффективное по Бентаму состояние

1. Докажите, что эффективные по Бентаму усилия участников в экономике с силой spillovers γ – это в точности равновесные усилия тех же участников в экономике с силой spillovers 2γ
2. Докажите, что в равновесии каждый участник впахивает меньше, чем в эффективном по Бентаму состоянии экономики (подсказка: используйте Задачу 2)
3. Проверьте на численном примере при $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = 1$ и $\gamma = 1/4$, что в равновесии по Нэшу каждый отдельный участник получает меньшую полезность, чем в эффективном по Бентаму состоянии. Более умный способ сказать это: эффективное по Бентаму состояние есть Парето-улучшение (не единственно возможное) равновесия по Нэшу.

Задача 5: Уравнения равновесия при peer effects на сетях

Перешкалируем силу peer effects так:

$$\lambda \equiv \frac{\theta}{1 + \theta} \quad 0 < \lambda < 1$$

Докажите, что равновесные усилия всегда положительны и всегда удовлетворяют системе:

$$x_A = (1 - \lambda)\alpha_A + \lambda \frac{x_B + x_C}{2}$$

$$x_B = (1 - \lambda)\alpha_B + \lambda x_A$$

$$x_C = (1 - \lambda)\alpha_C + \lambda x_A$$

Задача 6*: сравнительная статика по силе spillovers

1. Покажите, что усилия Аниты возрастают/убывают по силе spillovers тогда и только тогда, когда продуктивность Аниты ниже/выше, чем среднее арифметическое из продуктивностей Билла и Чанга
2. Пусть продуктивности участников такие:

$$\alpha_A = \frac{1}{2} \quad \alpha_B = 1 \quad \alpha_C = 2$$

Покажите, что усилия Билла немонотонно варьируются по силе spillovers: сперва убывают, а потом возрастают.

Задача 7** : эффективность по Бентаму при peer effects

Пусть $\lambda = 0.9$ (это оочень сильные peer effects)

1. Вычислите эффективное по Бентаму состояние экономики.
2. Покажите, что в равновесии все участники недорабатывают/перерабатывают тогда и только тогда, когда следующая величина отрицательна/положительна:

$$\alpha_A - \frac{\alpha_B + \alpha_C}{2}$$

3. Покажите, что в равновесии все участники недорабатывают/перерабатывают тогда и только тогда, когда корреляция продуктивности участника с числом соседей участника отрицательна/положительна

Для справки: результат пункта 3 верен для модели peer effects на какой угодно сети с каким угодно числом участников!